Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

Sumatoria y Productoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

   (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
   (b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$
   (c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$
   (d) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$
   (e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$
   (f) $n + 2n + 3n + \cdots + n^2$

   ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

   (a) $5 \cdot 6 \cdots 99 \cdot 100$ (b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdots 1024$ (c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

   i) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$ ii) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$ iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$ v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

3. Calcular

   i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (4i+1)$ ii) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

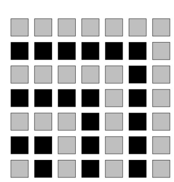
4. Calcular

   i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i$
   ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i$, $q \in \mathbb{R}$
   iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$, $q \in \mathbb{R}$
   iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} q^i$, $q \in \mathbb{R}$

Inducción

5. Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$:

   i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



   ii) usando la suma aritmética (o suma de Gauss).
   iii) usando el principio de inducción.

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

   i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

   i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

   ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$

   iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

   iv) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1 - a^{2^n}}{1-a}, \ \ a \in \mathbb{R} - \{1\}$

   v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

8. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

9. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

   ii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$).

   iii) Calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\displaystyle\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

    i) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

    ii) $3^n \geq n^3$

    iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

    iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

    v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

    vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

    vii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

11. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales todos del mismo signo y tales que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que
    $$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$
    ¿En qué paso de la demostración se usa que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$? ¿Y que todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen el mismo signo?

    ii) Deducir que si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + na$.

12. Probar que

    i) $n! \geq 3^{n-1}, \ \forall\, n \geq 5$

    ii) $3^n - 2^n > n^3, \ \forall\, n \geq 4$

    iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \ \forall\, n \geq 3$

13. Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^2 + 1 < 2^n$ y demostrar la validez de su conclusión. *Sugerencia:* para el paso inductivo, tener presente que $n^2 + 1 < 2^n$ es equivalente a $2^n > n^2 + 1$.

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que
    i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
    ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi\,(n-2)$.

Recurrencia

15. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.
    i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
    ii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = 2a_n + 3^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
    iii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = n\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
    iv) $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

17. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 9i), calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^3$ y, aplicando el Ej. 9i), calcular de otra forma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ (comparar con Ej 6).

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.
    i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2$ y $a_{n+2} = n\,a_{n+1} + 2(n+1)a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
    ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4$ y $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
    iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3$ y $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
    iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6$ y $a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

19. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(a) Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y probar su validez.

ii) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

y probar su validez.

20. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2}\,a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

21. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i\,a_i,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\Big),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

22. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

Probar que $f^{3k}(x) = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

23. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida como:

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ es un cuadrado} \\ 2n & \text{si no} \end{cases}$$

Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_k}(2^k) = 2$, donde $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ veces}}$.

24. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$.

25. Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ si se tienen números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y se desea calcular su producto, entonces sin importar cómo se inserten los paréntesis en el producto, se requieren exactamente $n-1$ multiplicaciones para calcularlo.
<u>*Comentarios*</u>:

- Recordar que la multiplicación es una operación binaria: está definida para dos números.
- Si queremos multiplicar tres números a, b, c, el enunciado afirma que se requieren dos productos. En efecto, se puede hacer $a \cdot (b \cdot c)$, o bien $(a \cdot b) \cdot c$.
- Si queremos multiplicar cuatro números a, b, c, d, el enunciado afirma que se requieren tres productos. En efecto, se puede hacer $\big((a \cdot b) \cdot c\big) \cdot d$, o bien $\big(a \cdot b\big) \cdot \big(c \cdot d\big)$, o bien $\big(a \cdot (b \cdot c)\big) \cdot d$, o bien $a \cdot \big((b \cdot c) \cdot d\big)$, o bien $a \cdot \big(b \cdot (c \cdot d)\big)$.